

Református Iskolák XXVIII. Országos Matematikaversenye, 2020

– 11. évfolyam, megoldókulcs –

- (1) A százzal osztható számok négyvel és huszonöttel is oszthatóak, így ezek nem befolyásolják a szóbanforgó halmazok egymáshoz való nagyságrendi viszonyát.

2 pont

Az adott jegyekből négyvel osztható, de huszonöttel nem osztható szám csakis húszra végződhet. Ugyanígy, huszonöttel osztható, de négyvel nem osztható csakis huszonötre végződhet.

2+2 pont

E számok között párosítást kapunk, ha a végződéseket fölcseréljük. Vagyis, a vizsgált halmazok elemszáma megegyezik.

2 pont

Összesen: 8 pont

Megjegyzés. A helyes választ kombinatorikai úton, közvetlen számolás útján is megkaphatjuk. A közös számosság: $5 \cdot 6^{2018} \cdot 2$. (Pontozás: 3+2+3 pont)

- (2) Másként fogalmazva az a feladat, hogy keressük meg az $z^2 + y^2 = x^2$ egyenletnek eleget tevő $x > y > z$ prímeket.

2 pont

Nyilván z és y paritása nem lehet egyforma, így szükségképpen $z = 2$ teljesül.

2 pont

Tehát $4 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, ami csak úgy teljesülhet, ha $x + y = 4$ és $x - y = 1$. Ez azonban lehetetlen, hiszen ebből $2x = 5$ adódik, ami nem ad egész megoldást.

6 pont

Összesen: 10 pont

Az $x - y = 1$ azonosság paritásvizsgálat nélkül is megkapható. Mivel x és y prímek, ezért ez csak úgy lehetséges, ha $x = 3$ és $y = 2$. Azonban ekkor $z^2 = 5$, ami azt mutatja, hogy nincs ilyen háromszög. (Pontozás: 4+4+2 pont)

- (3) Tekintsük azt a családot, melynek mindegyik tagja tartalmazza a nullát. Ez olyan metsző család, melynek tagszáma 2^n . Vagyis a legnagyobb tagszámú metsző család tagszáma legalább ennyi.

6 pont

Másrészt, egy halmaz és a komplementere egyszerre nem tartozhat metsző családhoz. Mivel a részhalmazok száma 2^{n+1} , ezért egy metsző család legfeljebb fele ennyi tagból állhat. Tehát a legnagyobb elemszám egy metsző család esetén 2^n .

6 pont

Összesen: 12 pont

- (4) A paraméterek választásából adódóan mindegyik logaritmus szigorúan monoton növekvő, ezért a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint

$$\log_a \left(\frac{b+c}{2} \right) + \log_b \left(\frac{c+a}{2} \right) + \log_c \left(\frac{a+b}{2} \right) \geq \log_a \sqrt{bc} + \log_b \sqrt{ca} + \log_c \sqrt{ab}.$$

4+4 pont

A logaritmus azonosságait felhasználva, ez utóbbi összeg az alábbi módon is felírható:

$$\frac{\log_a b + \log_b a}{2} + \frac{\log_b c + \log_c b}{2} + \frac{\log_c a + \log_a c}{2}.$$

2 pont

A számlálókban szereplő összeadandók egymás reciprokai, így értékük legalább kettő, szintén a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség miatt. Így épp a kívánt becsléshez jutunk.

4 pont

Összesen: 14 pont

- (5) Legyen a körülírt kör sugara R , a beírté pedig r . A szerkesztés lépései:

- Fölveszünk egy R sugarú kört és ennek tetszőleges átmérőjét.
- Az átmérő valamelyik oldalán azzal párhuzamost húzunk r távolságban.
- Ugyanezen az oldalon föl vesszük az átmérő 135° fokos látó körívét.
- A párhuzamos és a látó kör egyik metszéspontját választjuk a beírt kör középpontjának.
- Az átmérő végpontjaiból érintőket húzva a körhöz, kijelöljük a derékszögű csúcsot.

5 pont

A szerkesztés lépéseiből világos, hogy a kapott háromszög beírt körének sugara r .

2 pont

Továbbá, a (d) lépésbeli érintők átmérővel bezárt szögeinek összege $2(180^\circ - 135^\circ) = 90^\circ$ fokos a (c) pont miatt. Ezért a szerkesztés derékszögű háromszöget eredményez. Azonban ez esetben a derékszögű csúcs a Thálesz-tétel értelmében illeszkedik az (a) pontbeli körre. Vagyis, a körülírt kör sugara R .

5 pont

A szerkeszthetőség feltétele, hogy a (c) lépésbeli látó kör messe a (b) lépés egyenesét. Ez akkor áll, ha a látó kör legtávolabbi pontja az átmérőtől legalább r . Vagyis,

$$R \tan 22.5^\circ \geq r.$$

4 pont

Összesen: 16 pont