

RIOMV 2020
12. évfolyam – Megoldások –

1. feladat

a) Legyen P annak valószínűsége, hogy legalább egy nyertes szelvénye van a Szabó családnak.

$$P(\text{legalább egy nyertes szelvény}) = 1 - P(\text{egy szelvény sem nyer}) = 1 - (1 - 0,0233)^{100} \approx 0,905.$$

2 pont

b) Annak valószínűsége, hogy pontosan három nyertes szelvényük lesz:

$$P(3 \text{ nyertes szelvény}) = \binom{100}{3} \cdot 0,0233^3 \cdot (1 - 0,0233)^{97} \approx 0,208.$$

3 pont

c) $0,99 \leq P(\text{van nyertes szelvény}) = 1 - P(\text{egy se nyer})$

$$0,01 \geq P(\text{egy se nyer}) = (1 - 0,0233)^n.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve $-2 \geq n \cdot \lg 0,9767$.

$$\text{Innen } n \geq \frac{-2}{\lg 0,9767} \approx 195,3$$

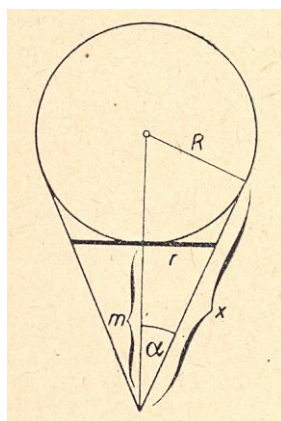
A Szabó családnak ehhez legalább 196 lottószelvényt kell kitöltenie.

5 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat

Ábrát készítünk.



A víz akkor folyhat ki teljesen a gömbből, ha a gömb legmélyebb pontjához fektetett érintősík által levágott kúp térfogata legalább akkora, mint a gömb térfogata. Ha a két térfogat éppen egyenlő, akkor az ábra jelöléseinek a felhasználásával kapjuk

$$\frac{4R^3\pi}{3} = \frac{r^2 m \pi}{3}, \text{ vagyis } 4R^2 = r^2 m.$$

2 pont

A hasonló háromszögekből $\frac{x}{m} = \frac{R}{r}$.

1 pont

Az érintő és a szelőszakaszok tételéből $x^2 = m(m + 2R)$.

2 pont

$x = \frac{mR}{r}$ behelyettesítésével kapjuk a következő másodfokú egyenletet:

$$m^2 - 4Rm - 8R^2 = 0, \text{ amelynek gyökei } m = 2R \pm 2R\sqrt{3}.$$

2 pont

Közülük a geometriai jelentés miatt csak az $m = 2R + 2R\sqrt{3} > 0$ érték a megfelelő.

1 pont

$$\text{Így } \sin \alpha = \frac{R}{m + R} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}, \text{ ahonnan } \alpha = 8,9^\circ, \text{ vagyis } 2\alpha = 17,8^\circ.$$

2 pont

Viszont m növekedésével a kúp térfogata nő, a csúcsszög kisebb lesz, ezért a kapott érték a feladat feltételeinek megfelelő legnagyobb csúcsszöget jelenti.

2 pont

Összesen: 12 pont

3. feladat

Kétféle megoldást mutatunk be.

1. megoldás

$y = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel kapjuk az $y^4 + 2y^3 + 2y^2 - 2y + 1 = 0$ egyenletet. Elegendő megmutatnunk, hogy ennek az egyenletnek nincs valós gyöke.

4 pont

Rendezzük át az egyenletet a következő alakra:

$$(y^2 + y)^2 + (y - 1)^2 = 0.$$

2 pont

Ha y valós, akkor ez csak akkor teljesülhet, ha mindkét tag értéke egyszerre 0, de ez nem teljesülhet, mert az első tag értéke $y = 0$, a második tag értéke $y = 1$ esetén lesz 0.

Így olyan x érték sincs, ami az eredeti egyenletet kielégítené.

6 pont

Összesen 12 pont

2. megoldás

Írjuk be az egyenletbe a $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi$; $k \in \mathbb{Z}$) összefüggést, és szorozzunk be $\cos^4 x$ -szel.

2 pont

$$\text{Ekkor } \sin^4 x + 2 \sin^3 x \cos x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin x \cos^3 x + \cos^4 x = 0$$

2 pont

$$1 + 2 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) = 0, \text{ vagyis}$$

4 pont

$$\sin 2x \cos 2x = 1, \text{ amiből } \sin 4x = 2, \text{ ami lehetetlen.}$$

4 pont

Összesen 12 pont

4. feladat

Legyen a henger magassága m , alapkörének sugara r . A feltétel szerint

$$r^2 \pi \cdot m = 2r^2 \pi + 2r\pi \cdot m, \text{ amiből } r \cdot m - 2r - 2m = 0$$

1 pont

$$\text{Ebből } (r - 2)(m - 2) = 4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$$

miatt a következő esetek lehetségesek:

2 pont

$$x - 2 = 1 \text{ és } m - 2 = 4, \text{ amiből } r = 3, m = 6, A = 54 \pi, V = 54 \pi$$

3 pont

$$x - 2 = 2 \text{ és } m - 2 = 2, \text{ amiből } r = 4, m = 4, A = 64 \pi, V = 64 \pi$$

3 pont

$$x - 2 = 4 \text{ és } m - 2 = 1, \text{ amiből } r = 6, m = 3, A = 108 \pi, V = 108 \pi$$

3 pont

Összesen: 12 pont

5. feladat

Írjuk fel az adott sorozat szomszédos tagjai különbségének a sorozatát, vagyis a differenciasorozatot: 8, 6, 16, 10, 24, 14, 32, 18, 40, ...

1 pont

A differenciasorozat páratlan sorszámú tagjai a 8, 16, 24, ... számtani sorozat tagjai.

1 pont

A differenciasorozat páros sorszámú tagjai a 6, 10, 14, ... számtani sorozat tagjai.

1 pont

Az eredetileg adott sorozat n -ik tagja: $a_n = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 8 + \dots$

Ha n páratlan, azaz ha $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) alakú, akkor

$$= a_{2k+1} = 2[(1 + 3 + \dots + (2k+1))] + 8(1 + 2 + 3 + \dots + k) =$$

$$= 2(k+1)^2 + 8 \frac{k^2 + k}{2} = 6k^2 + 8k + 2 = 6\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 8 \frac{n-1}{2} + 2, \text{ mivel } k = \frac{n-1}{2}.$$

$$\text{Így } a_n = \frac{3}{2}n^2 + n - \frac{1}{2}.$$

5 pont

Páros n -ekre, azaz $n = 2k$ esetén $a_{2k} = 2[(1 + 3 + \dots + (2k-1))] + 8(1 + 2 + \dots + k)$.

Innen az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy $a_{2k} = 2k^2 + 8 \frac{k^2 + k}{2} = 6k^2 + 4k$.

Itt $n = 2k$ miatt k helyére $\frac{n}{2}$ -t írva páros n -ekre $a_n = 6\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 4 \frac{n}{2} = \frac{3}{2}n^2 + 2n$.

5 pont

Innen $a_{2020} = \frac{3}{2} \cdot 2020^2 + 2 \cdot 2020 = 6\,124\,640$.

1 pont

Összesen : 14 pont

Megjegyzés:

Az a_n képlet egységes formában is felírható, figyelembe véve, hogy a páros és a páratlan sorszámú tagok közti különbség $n + \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2}$, $a_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4} + (-1)^n \left(\frac{2n+1}{4}\right)$.

Erre az észrevételre +2 pont adható.