

Református Iskolák XXVIII. Országos Matematika Versenye
10. évfolyam (megoldások)

- 1.** Kiszámítjuk a sorozat további néhány elemét! 1 pont
 Ha a 3. elem x_3 , akkor sorozat képzési szabálya miatt $1 \cdot x_3 - 1 = 1$,
 tehát a harmadik elem 2. 1 pont
 Ha a 4. elem x_4 , akkor $1 \cdot x_4 - 1 = 2$, tehát a negyedik elem 3. 1 pont
 Ha az 5. elem x_5 , akkor $2 \cdot x_5 - 1 = 3$, tehát a ötödik elem 2. 1 pont
 Ha az 6. elem x_6 , akkor $3 \cdot x_6 - 1 = 2$, tehát a hatodik elem 1. 1 pont
 Ha az 7. elem x_7 , akkor $2 \cdot x_7 - 1 = 1$, tehát a hetedik elem 1. 1 pont
 Mivel a 6. és a 7. elem megegyezik az 1. és a 2. elemmel, ezért a 7. elem után
 ugyanazok az elemek jönnek, mint a 2. elem után. A sorozatban kezdettől
 az 1, 1, 2, 3, 2 ötös csoport ismétlődik. 2 pont
 Mivel $2020 = 5 \cdot 404$, a sorozat 2020. eleme 2. 2 pont
 Az elemek egy fent leírt ötös csoportjának összege 9, így az első 2021 elem összege
 a 404 ötös csoport és a 2021. elem, (az 1) összege, ami $404 \cdot 9 + 1 = 3637$. 2 pont
összesen 12 pont
- 2.** Mivel az egyenlőszárú háromszög szimmetrikus az alaphoz tartozó
 magasságvonalra (itt CF -re), ezért $AB \parallel ED$. 2 pont
 Legyen a BE egyenesnek az DF szakaszt felező pontja P .
 $PFB\Delta \cong PDE\Delta$, mert szögeik váltó- ill. csúcsszögek, és $DP = FP$. 2 pont
 Ezért az $FBDE$ négyszög paralelogramma, 2 pont
 és így $EF \parallel BC$. 2 pont
 Mivel $EF \perp AC$, ezért $BC \perp AC$. 2 pont
 Tehát az $ABC\Delta$ szögei: $ACB \sphericalangle = 90^\circ$, $CAB \sphericalangle = 45^\circ$, $CBA \sphericalangle = 45^\circ$. 2 pont
összesen 12 pont
- 3.** Legyen $\frac{BD}{BC} = x$, $\frac{DC}{BC} = y$, és így $x + y = 1$. 2 pont
 Mivel $DE \parallel AC$, ill. $DF \parallel AB$, ezért $EBD\Delta \sim ABC\Delta$, ill. $FDC\Delta \sim ABC\Delta$, 2 pont
 így $EBD\Delta$ és $ABC\Delta$, területeinek aránya x^2 , ill. $FDC\Delta$ és $ABC\Delta$ területeinek
 aránya y^2 . Tehát ha az $ABC\Delta$ területe T , akkor az $EBD\Delta$ területe x^2T és az
 $FDC\Delta$ területe y^2T . 2 pont
 Ezek mértani közepe xyT . 1 pont
 Mivel $AEDF$ paralelogramma, ezért az $EDF\Delta$ területe $= \frac{T - x^2T - y^2T}{2}$, 2 pont
 ami $x + y = 1$ felhasználásával éppen xyT , 1 pont
 ami a bizonyítandó állítást jelenti. 2 pont
összesen 12 pont

4. A megoldandó egyenlettel ekvivalens az $x(y - 1) = 5y^3$ egyenlet. 2 pont
 Mivel $y - 1$ -nek és y -nak nincs közös prímtényezője, ezért $y - 1$ szóba jövő értéke csak vagy a prímtényezőt nem tartalmazó $0, 1, -1$ értékek egyike, vagy az $5, -5$ értékek egyike lehet. 3 pont
 Ha $y - 1 = 0$, akkor $y = 1$, és így $5y^3$ nem nulla, tehát ekkor az egyenletnek nincs megoldása. 1 pont
 Ha $y - 1 = 1$, akkor $y = 2$, és $x = 40$ egész számok elégítik ki az egyenletet, ez is megoldás. 1 pont
 Ha $y - 1 = -1$, akkor $y = 0$, és $x = 0$ egész számok elégítik ki az egyenletet, ez is megoldás. 1 pont
 Ha $y - 1 = 5$, akkor $y = 6$, és $x = 6^3 = 216$ egész számok elégítik ki az egyenletet, ez is megoldás. 1 pont
 Ha $y - 1 = -5$, akkor $y = -4$, és $x = 64$ egész számok elégítik ki az egyenletet, ez is megoldás. 1 pont
 Tehát a keresett egész megoldások:
 $y = 2, x = 40$; $y = 0, x = 0$; $y = 6, x = 216$; $y = -4, x = 64$. 2 pont
összesen 12 pont

5. Könnyű belátni, hogy ha a és b pozitív számok, akkor 5 pont
 $\frac{a^2}{b} \geq 2a - b$, mert az ezzel ekvivalens $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ igaz.
 Hasonlóan belátható, hogy $\frac{b^2}{c} \geq 2b - c$, 2 pont
 és $\frac{c^2}{a} \geq 2c - a$. 2 pont
 Ezek összeadásával: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 2a - b + 2b - c + 2c - a = a + b + c$,
 amit bizonyítani kellett. 3 pont
összesen 12 pont