

8. osztály feladatai 2020.

Összeállította: Antal Klára matematika szaktanácsadó DRK Dóczy Gimnáziuma

1. Gondoltam két természetes számra. Összegük 8448. Az egyik szám öttel osztható és páros. Ha ennek a számnak elhagyjuk az utolsó számjegyét, a másikat kapjuk. Mekkora a két szám különbsége?

Megoldás:

Ha egy szám osztható 5-tel és páros, akkor osztható 10-zel.....2 pont

Az egyik szám tehát a másik 10-szerese, vagyis $8\,448 = 11x / :11$ 3 pont

$768 = x$ 1 pont

A számok a 7 680 és a 768. 2 pont

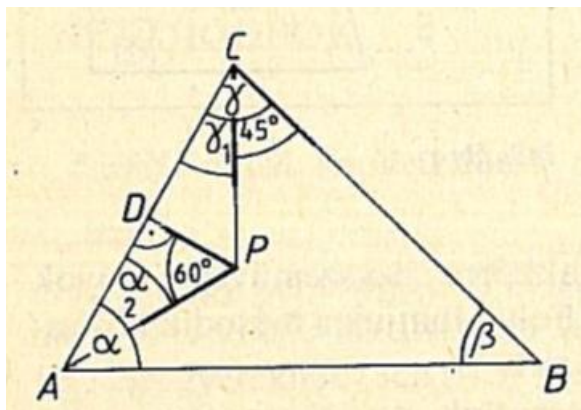
A különbségük: $7\,680 - 768 = 6\,912$ 1 pont

Összesen:.....9 pont

2. Az ABC háromszög α szögének felezője 60° -os szöget zár be az AC oldal felezőmerőlegesével. A két egyenes metszéspontját jelölje P. Tudjuk, hogy a $\angle PCB = 45^\circ$. Mekkora a háromszög szögei?

Megoldás:

Vázlatkészítés:.....2 pont



Az ADP Δ derékszögű, amelyben $\angle P = 60^\circ$ -os,.....1 pont

ezért $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$ -os.....1 pont

$\alpha = 60^\circ$ 1 pont

Az APC Δ egyenlő szárú, mert a P csúcsa rajta van az AC oldal felezőmerőlegesén.....1 pont

ezért a $\gamma_1 = 30^\circ$ -os,.....1 pont

a $\gamma = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ -os.....1 pont

Az eredeti háromszögben $\alpha = 60^\circ, \gamma = 75^\circ$, ezért a harmadik szöge $\beta = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$1 pont

A háromszög szögei $60^\circ, 75^\circ, 45^\circ$ -osak.....1 pont

Összesen:.....10 pont

3. Egy átlátszatlan zacskóban 10 db piros, 10 db fehér és 10 db zöld golyó van. Legkevesebb hány golyót kell belőle kivenni, hogy a kivett golyók között biztosan legyen mindegyik színből egy-egy és hányat, hogy három legyen valamelyik színből? (Az állítást indokolni kell!)

Megoldás:

a) Legkevesebb 21 darab golyót kell kivennünk, hogy azok között biztosan legyen mindegyik színűből egy-egy.....1 pont

Indoklás:

- (1) Ha 10 darabot veszünk ki, akkor lehet, hogy mind a 10 darab „egyszínű”1 pont
- (2) Ha még 10 darabot veszek ki, akkor lehet, hogy ezek mindegyike a „második” színű, és ezért még mindig nincs „harmadik színű” golyó a kihúzottak között.....1 pont
- (3) Ha e két húzás után még egy golyót emelünk ki a zacskóból, akármilyenek voltak is az első két húzásban kivettek, most biztos, hogy már "harmadik színű" golyónk is lesz.....1 pont

b) Legkevesebb 7 golyót kell kivennünk, hogy azok között három legyen valamelyik színűből.....1 pont

Indoklás:

- (1) Húzzunk először 3 golyót! Ez a három golyó lehet, hogy azonos színű, de nem biztos. Az is lehet, hogy mind más színű.....1 pont
- (2) Ha 4 darabot húznánk vagy 5-öt, lehet, hogy van köztük három azonos színű, de nem biztos, mert lehet, hogy az első esetben 2 pirosat meg 2 zöldet, illetve a második esetben 2 pirosat + 2 zöldet + 1 fehéret húzunk.....2 pont
- (3) Ha 6 golyót emelünk ki, lehet, hogy van köztük három azonos színű, de nem biztos, mert lehet, hogy 2 piros + 2 fehér + 2 zöld golyót emeltünk ki.....1 pont
- (4) A 7 golyó kihúzása esetén már biztosan lesz három egyező színű is.....1 pont

Ha a 6 kiemelt golyó között mind a három színű golyóból 2-2 darab van és még kiemelünk egy golyót, akkor ennek a színe megegyezik valamelyik golyó színével, és abból a színű golyóból már három darab van.1 pont

Összesen:.....11 pont

4. Péternek 100 könyve volt. Egyik nap átrendezte azokat: a középső polcról letette a könyvek felét az alsó polcra. Az alsó polcról kivette az eredetileg ott lévő könyvek egyharmadát, ezeknek egyharmadát áttette a középső polcra, a maradékot pedig a felső polcra. Ezután a felső polcról leemelt 10 könyvet és egyenlően szétosztotta a középső és az alsó polcon. Az átrendezés után minden polcon annyi könyv volt, mint eredetileg. Hány könyv volt eredetileg az egyes polcokon?

Megoldás:

Az egyes polcokon elhelyezett könyvek számát a felső polctól kezdve jelöljük x -szel, y -nal és z -vel.

Első változtatás szerinti állapot:

Felső polc: -

Középső polc: $y - \frac{y}{2}$ 1 pont

Alsó polc: $z + \frac{y}{2}$ 1 pont

Második változtatás szerinti állapot:

Felső polc: $x + \frac{2}{9}z$ 1 pont

Középső polc: $y - \frac{y}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{3} = \frac{y}{2} + \frac{z}{9}$ 2 pont

Alsó polc: $z + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = \frac{2}{3}z + \frac{y}{2}$ 2 pont

Harmadik változtatás szerinti állapot:

Felső polc: $x + \frac{2}{9}z - 10 = x \Rightarrow z = 45$ 2 pont

Középső polc: $\frac{y}{2} + \frac{z}{9} + 5 = y \Rightarrow y = 20$ 2 pont

Alsó polc: $\frac{2}{3}z + \frac{y}{2} + 5 = z$ 1 pont

$x = 100 - 45 - 20 = 35$ 1 pont

Az eredeti állapot szerint a felső polcon 35 db, a középsőn 20 db, az alsón pedig 45 db könyv van.....1 pont

Összesen:.....14 pont

5. Az autó utasa a kilométereket jelző oszlopon egy kétjegyű számot olvas le. Útját változatlan sebességgel folytatja, és egy órával később egy másik oszlop előtt halad el, amelyen ugyanazon számjegyeket látja, de fordított sorrendben. Ezután egy óra múlva újabb oszlophoz érkezik, és ezen is ugyanazt a két számjegyet látja, mint az elsőt, de köztük egy zérussal. Mekkora az autó óránkénti sebessége, és milyen számokat olvasott le az utas az oszlopokról?

Megoldás:

	Százask	Tízese	Egyese	Szám értéke
Első leolvasáskor	-	x	y	$10x+y$
1 órával később	-	y	x	$10y+x$
2 órával később	x	0	y	$100x+y$

.....3 pont

Az autó az indulástól kezdve változatlan sebességgel halad. Ezért, ha a harmadik leolvasáskor látott számból kivonjuk a második alkalommal leolvasottat, továbbá, ha a második leolvasáskor látott számból kivonjuk az első alkalommal leolvasottat, a kiszámított különbség ugyanannyi. Az autó sebessége:

$$(100x + y) - (10y + x) = (10y + x) - (10x + y) \dots\dots\dots 2 \text{ pont}$$

Ebből $y = 6x$ 3 pont

Mivel az y számjegy, ezért az x csak 1 lehet, mert bármelyik másik számjegy hatszorosa már kétjegyű számot ad.1 pont

Ezért $y=6$1 pont

A leolvasott számok a következők voltak:

- az első leolvasáskor $10x + y = 10 + 6 = 16$ 1 pont
- 1 órával később $10y + x = 60 + 1 = 61$ 1 pont
- 2 órával később $100x + y = 100 + 6 = 106$ 1 pont

Az autó óránkénti sebességét az egyenlet bal oldalán levő különbségből határozhatjuk meg. Ebben ugyanis a kisebbítendő a harmadik leolvasáskor látott szám, a kivonandó pedig a második leolvasáskor látott. A két leolvasás között 1 óra telt el, és közben az autó változatlan sebességgel haladt.

$$(100x + y) - (10y + x) = 106 - 61 = 45(km) \dots\dots\dots 2 \text{ pont}$$

Az autó változatlan sebességgel haladva minden órában 45 km-t tesz meg, így sebessége $45 \frac{km}{h}$.

.....1 pont

Összesen:.....16 pont