

**RIOMV 2020****Megoldás – 9. évfolyam**

1. A könnyebb áttekinthetőség érdekében foglaljuk táblázatba az állításokat!

| Tanulók | Első állítás | Második állítás |
|---------|--------------|-----------------|
| Adél    | D2           | A3              |
| Bori    | B1           | C2              |
| Cintia  | C3           | B5              |
| Dóri    | D2           | E4              |
| Edit    | E4           | A1              |

A D2 és az E4 állítások egyénél többször fordulnak elő, ezért célszerű valamelyikükkel kezdeni a vizsgálatot.

2 pont

Induljunk ki D2-ből.

- a) Ha D2 igaz, akkor Adél illetve Dóri másik állítása hamis:

| Tanulók | Első állítás | Második állítás |
|---------|--------------|-----------------|
| Adél    | D2=i         | A3=h            |
| Bori    | B1           | C2              |
| Cintia  | C3           | B5              |
| Dóri    | D2=i         | E4=h            |
| Edit    | E4=h         | A1              |

Ha E4 hamis, akkor A1 igaz (Edit második állítása). Így az első két helyen Adél és Dóri áll. Ez viszont azt jelenti, hogy Bori mindkét állítása hamis. Ez a feladat feltétele szerint nem lehetséges, tehát a D2 állítás nem lehet igaz.

2 pont

- b) Ha D2 hamis, akkor Adél és Dóri másik állítása igaz:

| Tanulók | Első állítás | Második állítás |
|---------|--------------|-----------------|
| Adél    | D2=h         | A3=i            |
| Bori    | B1           | C2              |
| Cintia  | C3           | B5              |
| Dóri    | D2=h         | E4=i            |
| Edit    | E4=i         | A1              |

Ha E4 igaz, akkor A1 hamis (Edit második állítása). Így a harmadik helyen Adél, a negyedik helyen Edit áll. Ekkor Cintia első állítása (C3) hamis, vagyis B5 igaz, ami azt jelenti, hogy Bori lett az ötödik.

Ebből következik, hogy Bori második állítása igaz, azaz Cintia a második helyezett.

A fentiek alapján az első Dóri lett, vagyis a sorrend:

Dóri, Cintia, Adél, Edit, Bori.

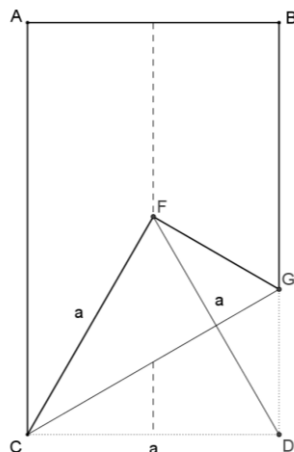
2 pont

Nem vizsgáltuk még Cintia két állítását. A megállapított sorrend alapján az első állítása hamis, a második igaz, vagyis a fenti sorrend a feltételek mindegyikének megfelel.

2 pont

Megjegyzés: Más gondolatmenettel is el lehet jutni a megoldáshoz. Amennyiben a versenyző a helyes sorrendet indoklás nélkül közli, maximum 4 pontot kaphat.

2. Jelölje  $a$  a téglalap rövidebbik oldalát.



A behajtás miatt ( $D$ -t tükröztük a  $CG$  egyenesre) a  $CGF$  és  $CDG$  háromszögek egybevágók. A két egybevágó háromszög megfelelő oldalai egyenlő hosszúságúak, így  $CD = CF = a$ .

3 pont

$F$  rajta van a téglalap középvonalán, azaz a  $CD$  szakasz felezőmerőlegesén, így egyenlő távolságra van  $C$ -től és  $D$ -től, vagyis  $CF = DF = a$ .

3 pont

Ezzel beláttuk, hogy a  $CDF$  háromszög egyenlő oldalú, tehát minden szöge  $60^\circ$ .

1 pont

A  $C$ -nél lévő  $60^\circ$ -os szöget a  $CG$  hajtásvonal felezi, azaz két darab  $30^\circ$ -os szög keletkezik.

1 pont

Mindebből az következik, hogy  $CG$  hajtásvonal a  $C$  csúcsnál lévő  $90^\circ$ -os szöget harmadolja, azaz 2:1 arányban (egy  $60^\circ$  és egy  $30^\circ$ -os szögre) osztja fel.

2 pont

Megjegyzés: Amennyiben a versenyző egy lapon helyesen elvégzi a hajtogatást, de továbblépni nem tud, 2 pontot kap. Ugyancsak 2 pontot kaphat az, aki helyesen megállapítja a végeredményt, de azt nem indokolja.

3. A kapott maradékokat kivonva a két számból, 2016-ot és 1980-at kapunk.  
Ennek a két számnak a keresett osztó közös osztója lesz.

4 pont

A két szám prímtényezős felbontásával meghatározzuk a legnagyobb közös osztójukat:

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

A legnagyobb közös osztó  $2^2 \cdot 3^2 = 36$ .

2 pont

A többi közös osztó mind osztója a 36-nak. Mivel tudjuk, hogy a második osztásnál fellépő maradék 22, a keresett közös osztónak 22-nél nagyobbnak kell lennie.

A 36 második legnagyobb osztója a 18, ez kisebb, mint 22, tehát a keresett ismeretlen osztó 36.

4 pont

Valóban,  $2020 = 36 \cdot 56 + 4$  és  $2002 = 36 \cdot 55 + 22$ .

2 pont

4. A négyzetek sorozatáról megállapítható, hogy bármely négyzet oldalának hossza megegyezik az előző négyzet átlójával.

4 pont

Pithagorasz tételét felhasználva kapjuk, hogy az  $a$  oldalú négyzet átlója  $a\sqrt{2}$ .

2 pont

Ezt figyelembe véve a négyzetek oldalának sorozata a legkisebb, egységnyi oldalú négyzetből kiindulva:

1;  $\sqrt{2}$ ; 2;  $2\sqrt{2}$ ; 4;  $4\sqrt{2}$ ; ...

2 pont

A sorozat páratlan tagjai 2 egymást követő hatványai, így a 19. tag  $2^9$ .

Innen a sorozat 20. tagja  $\sqrt{2} \cdot 2^9$  cm.

2 pont

A négyzet köré írt kör sugara megegyezik átlójának felével.

2 pont

A 20. négyzet köré írt kör sugara:  $\frac{\sqrt{2} \cdot 2^9 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2^9 = 512$  cm.

2 pont

5. I. megoldás:

Legyen  $a, b, c$  és  $d$  három egymást követő szám a kör mentén. Tudjuk, hogy

$$a + b + c \leq 19 \quad (1) \text{ és } a + b + c + d \geq 25 \quad (2)$$

A (2) egyenlőtlenségben  $a + b + c$  helyére 19-et írva, a baloldalt növeljük:

$$19 + d \geq a + b + c + d \geq 25$$

Innen  $d \geq 6$  adódik. Mivel a számok egy kör mentén helyezkednek el, és a fenti egyenlőtlenségek bármely három illetve négy számra teljesülnek, következik, hogy mind a 11 szám legalább 6.

4 pont

Vizsgáljuk meg, hogy milyen számok kerülhetnek egymás mellé:

Az (1) egyenlőtlenség miatt két 7-es (vagy más, 6-nál nagyobb szám) nem kerülhet egy számhármassba, mert  $2 \cdot 7 + 6 = 20 > 19$ . Tehát bármely két 7-es között lennie kell legalább két 6-osnak.

4 pont

A (2) egyenlőtlenség miatt ugyanakkor azt is tudjuk, hogy négy 6-os sem lehet egymás mellett, mert  $4 \cdot 6 = 24 < 25$ .

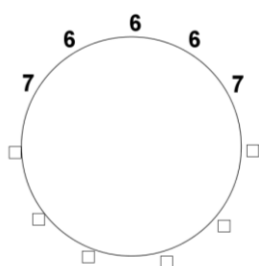
Vagyis a számok úgy helyezkednek el a kör mentén, hogy két 7-es között két vagy három 6-os áll.

Ha bármely két 7-es között minden esetben két 6-os állna, akkor a  $7 - 6 - 6$  számhármassoknak kellene ismétlődnie, de ez nem lehetséges, mert a 11 nem osztható 3-mal.

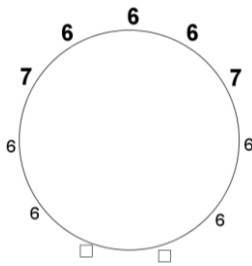
Tehát a számok elrendezése olyan, hogy legalább egy helyen két 7-es között három 6-os áll.

4 pont

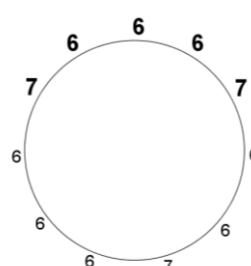
Induljunk ki egy ilyen számötösből (1. ábra). A 7-esek melletti két-két üres helyen a fentiek miatt csak 6-osok állhatnak (2. ábra). A fennmaradó két helyre nem kerülhet sem két 6-os (mert akkor 6 db lenne egymás mellett), sem két 7-es. Vagyis az egyik szám 6, a másik 7. A 3. ábra a kettő közül az egyik esetet mutatja.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

3 pont

Így a feltételeknek megfelelő 11 db szám összege csak

$$6 + 6 + 6 + 7 + 6 + 6 + 6 + 7 + 6 + 6 + 7 = 69 \text{ lehet.}$$

1 pont

Megjegyzés: Amennyiben a versenyző próbálgatással megkapja ugyanezt az elrendezést, de az indoklása hiányzik, maximum 8 pontot kaphat.

II. megoldás:

Jelöljük a 11 számot  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ -val és írjuk fel a feltételeknek eleget tevő

11 – 11 db egyenlőtlenséget:

$$\begin{array}{rcl}
a + b + c & \leq & 19 \\
b + c + d & \leq & 19 \\
c + d + e & \leq & 19 \\
\vdots & & \vdots \\
k + a + b & \leq & 19
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
a + b + c + d & \geq & 25 \\
b + c + d + e & \geq & 25 \\
c + d + e + f & \geq & 25 \\
d + e + f + g & \geq & 25 \\
\vdots & & \vdots \\
i + j + k + a & \geq & 25
\end{array}$$

Az egyenlőtlenségeket összeadva:

$$3 \cdot (a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k) \geq 209 \text{ és}$$

$4 \cdot (a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k) \leq 275$  adódik, ahonnan azt kapjuk, hogy a 11 természetes szám összege több, mint 68 és kevesebb, mint 70, vagyis 69.

8 pont

A számok elhelyezkedésének megállapításához az előző megoldás első gondolatából indulunk ki:

Legyen  $a, b, c$  és  $d$  három egymást követő szám a kör mentén. Tudjuk, hogy

$$a + b + c \leq 19 \text{ (1) és } a + b + c + d \geq 25 \text{ (2)}$$

A (2) egyenlőtlenségben  $a + b + c$  helyére 19-et írva, a baloldalt növeljük:

$$19 + d \geq a + b + c + d \geq 25$$

Innen  $d \geq 6$  adódik. Mivel a számok egy kör mentén helyezkednek el, és a fenti egyenlőtlenségek bármely három illetve négy számra teljesülnek, következik, hogy mind a 11 szám legalább 6.

4 pont

Mivel az összeg 69, és 11 db 6-os számjegy összege 66, következik, hogy a 6-osok mellett lenni kell

a) 3 db 7-esnek

b) 1 db 7-esnek és 1 db 8-asnak

c) 1 db 9-esnek.

A b) és c) eset könnyen kizárható, hiszen ekkor lenne olyan három egymást követő szám, melyek összege legalább 20 illetve 21.

A 3 db 7-es helyének megtalálása esetvizsgálattal megvalósítható.

4 pont